7 Data la funzione:

$$f(x) = \ln(x) - [\ln(x)]^2,$$

dimostrare che esistono due rette r e s tangenti al grafico della funzione in punti di ascissa $x > 1$, che passano entrambe per il punto $P(0; 1)$ e scrivere le rispettive equazioni.

7 Data la funzione:

$$f(x) = \ln x - (\ln x)^2,$$

la generica retta tangente in un punto $(\alpha; f(\alpha))$ del suo grafico, con $\alpha > 1$, è data da:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha).$$

Se tale retta passa per $P(0; 1)$, allora deve essere:

$$1 - f(\alpha) = f'(\alpha)(0 - \alpha) \rightarrow 1 - f(\alpha) = -\alpha \cdot f'(\alpha).$$

Esplicitiamo i termini $f(\alpha)$ e $f'(a)$ e risolviamo l'equazione in α:

$$1 - [\ln\alpha - (\ln\alpha)^2] = -\alpha\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha}\ln\alpha\right) \rightarrow 1 - \ln\alpha + (\ln\alpha)^2 = -1 + 2\ln\alpha \rightarrow$$

$$(\ln\alpha)^2 - 3\ln\alpha + 2 = 0.$$

Poniamo $z = \ln\alpha$ e risolviamo:

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \rightarrow (z-1)(z-2) = 0 \rightarrow z = 1 \vee z = 2.$$

Tornando ad α, troviamo:

$$z = 1 \rightarrow \ln\alpha = 1 \rightarrow \alpha = e;$$

$$z = 2 \rightarrow \ln\alpha = 2 \rightarrow \alpha = e^2.$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili, perché maggiori di 1, quindi esistono esattamente due rette tangenti al grafico di $f(x)$, per $x > 1$, che passano per P.
In ultimo, scriviamo le equazioni di queste due rette tangenti:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \rightarrow y - [\ln\alpha - (\ln\alpha)^2] = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha}\ln\alpha\right)(x - \alpha);$$

per $\alpha = e \rightarrow y - (1 - 1^2) = \left(\frac{1}{e} - \frac{2}{e}\right)(x - e) \rightarrow y = -\frac{1}{e}(x - e) \rightarrow y = -\frac{1}{e}x + 1;$

per $\alpha = e^2 \rightarrow y - (2 - 2^2) = \left(\frac{1}{e^2} - \frac{2}{e^2}\cdot 2\right)(x - e^2) \rightarrow y + 2 = -\frac{3}{e^2}(x - e^2) \rightarrow y = -\frac{3}{e^2}x + 1.$