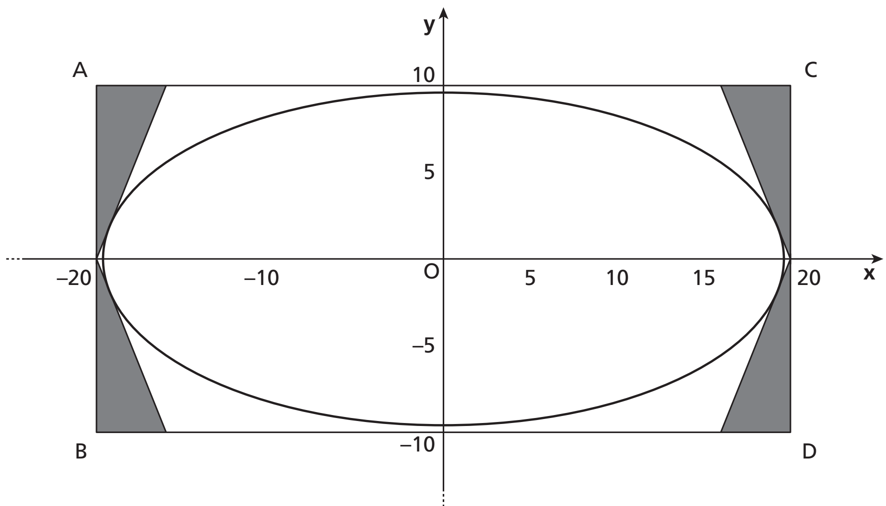
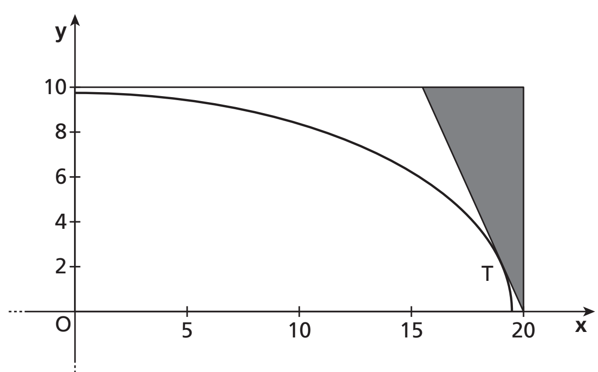
PROBLEMA 1

L'azienda per cui lavori vuole aprire in città una pista di pattinaggio su ghiaccio e ti ha dato l'incarico di occuparti del progetto.

La pista verrà realizzata su un terreno di forma rettangolare, di base 40 metri e altezza 20 metri, e secondo le specifiche che ti sono state fornite sarà di forma ellittica[1] e avrà area pari a 600 m^2. Stabilito un sistema di assi cartesiani *Oxy*, il cui centro coincide con il centro dell'ellisse e con quello del rettangolo, in figura 1 sono rappresentati il terreno e la pista, in figura 2 la regione relativa al primo quadrante. La superficie in grigio è da adibire a deposito e a servizi tecnici, per cui deve essere inaccessibile al pubblico: essa è delimitata dalle tangenti alla pista passanti per i punti medi dei lati verticali *AB* e *CD*.



■ **Figura 1**



■ **Figura 2**

1. L'equazione dell'ellisse, in coordinate cartesiane, è la seguente:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

1. Determina, in funzione di a e b (rispettivamente lunghezza del semiasse orizzontale e del semiasse verticale dell'ellisse) le coordinate del punto di tangenza T, e verifica che l'espressione della superficie totale S dell'area evidenziata in grigio nella figura 2 è:

   $$S = \frac{50\sqrt{400 - a^2}}{b}.$$

2. Per motivi estetici, è richiesto che la proporzione tra il semiasse orizzontale e quello verticale dell'ellisse sia uguale a quella tra il lato orizzontale e quello verticale del rettangolo. Ricordando che l'area della pista[2] deve essere pari a 600 m^2, determina i valori di a e b (approssimati al centimetro). Verifica inoltre che la superficie evidenziata in grigio occupi meno del 15% del terreno disponibile.

Un'altra problematica da affrontare riguarda la scelta di un macchinario per la produzione del ghiaccio necessario per la pista, tenendo presenti la dimensione della pista, il tempo impiegato per tale produzione e il relativo consumo di energia. Tramite una ricerca di mercato, hai individuato un dispositivo che riesce a lavorare a una velocità che è inversamente proporzionale allo spessore raggiunto e in 3 ore di lavoro, a temperatura ambiente standard, produce una lastra di ghiaccio di superficie di 600 m^2 avente uno spessore di 3 cm.

3. Individua, per il macchinario selezionato, il modello matematico che descrive l'andamento dello spessore dello strato di ghiaccio in funzione del tempo.

Per un utilizzo ottimale, la pista deve avere uno spessore compreso tra i 6,5 e gli 8 cm.

d. Determina il tempo che il macchinario impiega a realizzare uno strato di ghiaccio di spessore 7,5 cm.

2. L'area della superficie racchiusa dall'ellisse di semiassi a e b è pari a πab.

PROBLEMA 1

1. L'equazione generale dell'ellisse con centro nell'origine del sistema di riferimento e con i semiassi orizzontali e verticale lunghi rispettivamente a e b è:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Limitatamente al primo quadrante, il profilo della pista ellittica è allora descritto dalla funzione:

$$f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

con a e b positivi, $0<a<20$, $0<b<10$ e $0\leq x\leq a$.

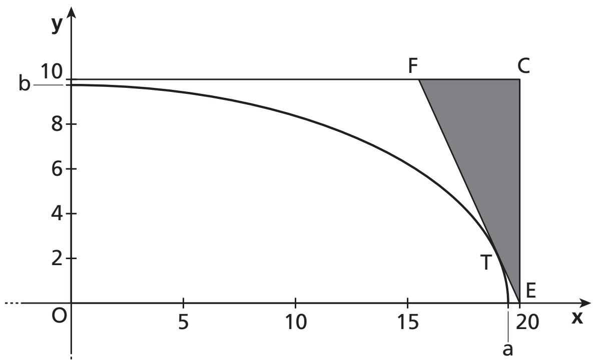


Figura 3

La generica retta (tranne quella verticale) passante per il punto $E(20;0)$ ha equazione:

$$y-0=m(x-20)\ \rightarrow\ y=mx-20m,$$

con m reale.

Fra queste rette cerchiamo quella tangente al grafico di $f(x)$, imponendo che il sistema formato dalle equazioni di $f(x)$ e della retta abbia una sola soluzione.

$$\begin{cases} y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \\ y=mx-20m \end{cases} \rightarrow\ mx-20m=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ \rightarrow$$

$$m^2x^2+400m^2x-40m^2x=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\ \rightarrow$$

$$a^2m^2x^2+400a^2m^2-40a^2m^2x=a^2b^2-b^2x^2\ \rightarrow$$

$$(a^2m^2+b^2)x^2-40a^2m^2x+400a^2m^2-a^2b^2=0.$$

Le eventuali soluzioni di questa equazione di secondo grado in x sono:

$$x=\frac{20a^2m^2\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a^2m^2+b^2}$$

L'equazione di secondo grado in x ha una sola soluzione se il suo discriminante è nullo:

$$\frac{\Delta}{4}=0\ \rightarrow\ (20a^2m^2)^2-(a^2m^2+b^2)(400a^2m^2-a^2b^2)=0\ \rightarrow$$

$$400a^4m^4 - 400a^4m^4 + a^4b^2m^2 - 400a^2b^2m^2 + a^2b^4 = 0 \rightarrow$$

$$a^2b^2(a^2m^2 - 400m^2 + b^2) = 0 \rightarrow a^2m^2 - 400m^2 + b^2 = 0 \rightarrow (a^2 - 400)m^2 = -b^2$$

Osserviamo che $a < 20 \rightarrow a^2 < 400$. Cambiamo il segno di entrambi i membri dell'equazione per ottenere un coefficiente positivo per m^2:

$$(400 - a^2)m^2 = b^2 \rightarrow m^2 = \frac{b^2}{400 - a^2} \rightarrow m = -\frac{b}{\sqrt{400 - a^2}},$$

dove abbiamo considerato solo la radice positiva per m perché il coefficiente angolare della retta cercata è negativo (vedi la figura 2 del testo del problema).

In corrispondenza di tale valore di m si ha $\frac{\Delta}{4} = 0$, quindi il punto di tangenza T ha ascissa data dalla soluzione dell'equazione di secondo grado scritta sopra:

$$x_T = \frac{20a^2m^2}{a^2m^2 + b^2} = \frac{20a^2\dfrac{b^2}{400 - a^2}}{a^2\dfrac{b^2}{400 - a^2} + b^2} = \frac{\dfrac{20a^2b^2}{400 - a^2}}{\dfrac{a^2b^2 + b^2(400 - a^2)}{400 - a^2}} = \frac{20a^2b^2}{400b^2} = \frac{a^2}{20}.$$

L'ordinata di T è:

$$f(x_T) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2}{20}\right)^2} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{400a^2 - a^4}{400}} =$$

$$\frac{ab}{20a}\sqrt{400 - a^2} = \frac{b}{20}\sqrt{400 - a^2}.$$

Il punto T ha dunque coordinate $T\left(\frac{a^2}{20}; \frac{b}{20}(400 - a^2)\right)$.

Potevamo cercare le coordinate di T anche per altra via. Considerato un punto generico $P(\alpha; f(\alpha))$ del grafico di $f(x)$, determiniamo la retta tangente al grafico in P e imponiamo che tale retta passi per il punto $E(20; 0)$. Il punto P che soddisfa tale proprietà sarà dunque il punto di tangenza T cercato.
La retta tangente in P ha equazione:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha).$$

Poiché $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$, l'equazione della retta tangente in P diventa:

$$y - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha^2} = -\frac{b\alpha}{a\sqrt{a^2 - \alpha^2}}(x - \alpha).$$

Imponiamo il passaggio per (20; 0):

$$0 - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha^2} = -\frac{b\alpha}{a\sqrt{a^2 - \alpha^2}}(20 - \alpha) \rightarrow$$

$$a^2 - \alpha^2 = \alpha(20 - \alpha) \rightarrow$$

$$a^2 - \alpha^2 = 20\alpha - \alpha^2 \rightarrow \alpha = \frac{a^2}{20}.$$

L'ascissa di T è dunque $x_T = \alpha = \frac{a^2}{20}$ e, come prima, si trova $T\left(\frac{a^2}{20}; \frac{b}{20}(400 - a^2)\right)$.

La retta tangente in T ha equazione:

$$y = mx - 20m, \text{ con } m = -\frac{b}{\sqrt{400 - a^2}} \rightarrow$$

$$y = -\frac{b}{\sqrt{400-a^2}}x + \frac{20b}{\sqrt{400-a^2}}.$$

Determiniamo ora l'espressione della superficie S calcolando le coordinate dei punti F e C.
Determiniamo le coordinate del punto di intersezione F fra tale retta tangente in T e il bordo superiore del terreno rettangolare, di equazione $y = 10$:

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{\sqrt{400-a^2}}x + \frac{20b}{\sqrt{400-a^2}} \\ y = 10 \end{cases} \rightarrow$$

$$-\frac{b}{\sqrt{400-a^2}}x + \frac{20b}{\sqrt{400-a^2}} = 10 \rightarrow$$

$$-bx + 20b = 10\sqrt{400-a^2} \rightarrow x = \frac{20b - 10\sqrt{400-a^2}}{b} \rightarrow x = 20 - \frac{10}{b}\sqrt{400-a^2},$$

quindi le coordinae di F sono $F\left(20 - \frac{10}{b}\sqrt{400-a^2}; 10\right)$.

Le coordinate di C sono immediate: $C(20; 10)$.
La superficie evidenziata in grigio nella figura 3 è un triangolo di area:

$$S = \frac{1}{2}\overline{FE}\cdot\overline{CE} = \frac{1}{2}\left(20 - 20 + \frac{10}{b}\sqrt{400-a^2}\right)\cdot 10 = \frac{50}{b}\sqrt{400-a^2}.$$

2. Il rapporto fra i semiassi dell'ellisse deve essere lo stesso di quello fra i lati del rettangolo, quindi:

$$\frac{a}{b} = \frac{40}{20} \rightarrow a = 2b.$$

L'equazione della corrispondente ellisse è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{(2b)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'area racchiusa da questa ellisse è pari a:

$$A = \pi ab \rightarrow A = 2\pi b^2.$$

Imponiamo che tale area sia di 600 m^2 e troviamo i valori di a e b approssimati al centimetro:

$$2\pi b^2 = 600 \rightarrow b = \sqrt{\frac{300}{\pi}} \simeq 9{,}77\ \text{m} \rightarrow a = 2b \simeq 19{,}54\ \text{m}.$$

Con tali valori la superficie complessivamente destinata a deposito e servizi tecnici, evidenziata in grigio nella figura 1, ha area:

$$4S \simeq 4\cdot\frac{50}{9{,}77}\sqrt{400 - 19{,}54^2} \simeq 87{,}30\ \text{m}^2.$$

L'area del terreno disponibile, individuato dal rettangolo di lati 40 m e 20 m, è di 800 m^2, quindi:

$$\frac{4S}{800}\cdot 100 = \frac{87{,}30}{800}\cdot 100 \simeq 11\%.$$

La superficie adibita a deposito e servizi tecnici occupa meno del 15% dell'intero spazio a disposizione.

3. Indichiamo con $h(t)$ l'altezza della lastra di ghiaccio prodotta dal macchinario dopo un intervallo di tempo t dall'accensione, relativamente alla pista di area 600 m^2. Il tempo t è misurato in ore, l'altezza h in centimetri.
La velocità di produzione del ghiaccio, rappresentata dalla funzione $h'(t)$, è inversamente proporzionale

allo spessore raggiunto $h(t)$; questo equivale a dire che le grandezze h' e h sono legate dalla relazione $h' \cdot h = k$, con k costante.
Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili; risolviamola:

$$h' \cdot h = k \rightarrow hdh = kdt \rightarrow \int hdh = \int kdt \rightarrow \frac{1}{2}h^2 = kt + c_1 \rightarrow h(t) = \sqrt{2kt + c},$$

dove abbiamo considerato solo il radicale positivo perché $h(t)$ rappresenta lo spessore della lastra di ghiaccio e quindi non può essere negativo.
Determiniamo i valori delle costanti k e c nell'espressione di $h(t)$. Sappiamo che:

- all'istante iniziale lo spessore della lastra è di 0 cm: $h(0) = 0$;
- dopo 3 ore, la lastra è spessa 3 cm: $h(3) = 3$.

Mettiamo a sistema queste due condizioni:

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(3) = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{2k \cdot 0 + c} = 0 \\ \sqrt{2k3 + c} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ \sqrt{6k} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ k = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Con il macchinario scelto, pertanto, viene prodotta una lastra di ghiaccio il cui spessore (in cm) è funzione del tempo (in ore) secondo la legge:

$$h(t) = \sqrt{2 \cdot \frac{3}{2}t + 0} \rightarrow h(t) = \sqrt{3t}.$$

4. Calcoliamo quanto tempo il macchinario deve restare in funzione affinché la lastra di ghiaccio prodotta abbia uno spessore di 7,5 cm:

$$h(t) = 7{,}5 \rightarrow \sqrt{3t} = 7{,}5 \rightarrow 3t = 56{,}25 \rightarrow t = 18{,}75.$$

Il macchinario deve quindi funzionare per circa 18 ore e 45 minuti.