8 Stabilire se le rette:

r: $y = 5x - 6$, s: $y = 21x + 25$

sono tangenti alla curva δ di equazione:

$y = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

8 La retta r di equazione $r(x) = 5x - 6$ è tangente al grafico di $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ se retta e grafico hanno un punto in comune e se in tale punto il coefficiente angolare è lo stesso, cioè deve essere soddisfatto il sistema:

$$\begin{cases} r(x) = f(x) \\ r'(x) = f'(x) \end{cases} \to \begin{cases} 5x - 6 = x^3 - 2x^2 + x + 1 \\ 5 = 3x^2 - 4x + 1 \end{cases} \to \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0 \\ 3x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases}.$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado:

$$3x^2 - 4x - 4 = 0 \to x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{3} = \frac{2 \pm 4}{3} \to x_1 = -\frac{2}{3} \vee x_2 = 2.$$

Verifichiamo se tali valori sono soluzione anche della prima equazione, quella di terzo grado:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) + 7 = 0 \to -\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 7 = 0 \to \frac{229}{27} = 0 \to \text{ FALSO;}$$

$$2^3 - 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 7 = 0 \to 8 - 8 - 8 + 7 = 0 \to -1 = 0 \to \text{ FALSO;}$$

quindi la retta r non è tangente al grafico di $f(x)$ in alcun punto.

Ripetiamo il procedimento per la retta s di equazione $s(x) = 21x + 25$:

$$\begin{cases} s(x) = f(x) \\ s'(x) = f'(x) \end{cases} \to \begin{cases} 21x + 25 = x^3 - 2x^2 + x + 1 \\ 21 = 3x^2 - 4x + 1 \end{cases} \to \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 20x - 24 = 0 \\ 3x^2 - 4x - 20 = 0 \end{cases};$$

$$3x^2 - 4x - 20 = 0 \to x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{3} = \frac{2 \pm 8}{3} \to x_3 = -2 \vee x_4 = \frac{10}{3};$$

$$(-2)^3 - 2(-2)^2 - 20(-2) - 24 = 0 \to -8 - 8 + 40 - 24 = 0 \to 0 = 0 \to \text{ VERO;}$$

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 20\left(\frac{10}{3}\right) - 24 = 0 \to \frac{1000}{27} - \frac{200}{9} - \frac{200}{3} - 24 = 0 \to \text{ FALSO.}$$

Quindi la retta s è tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto di ascissa -2.